AUTOMATY A GRAMATIKY

9

Přijímání u ZA
Bezkontextové jazyky a ZA
Uzávěrové vlastnosti

Pavel Surynek

Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta
Katedra teoretické informatiky a matematické logiky

Přijímání slova u ZA: $L(Z) = N(Z_1)$

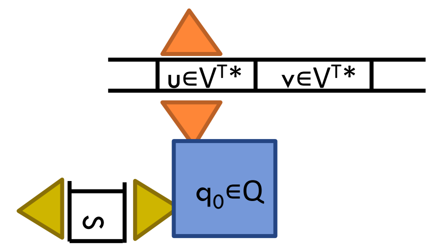
- $Z = (Q, X, Y, \delta, q_0, z_0, F)$
  - pro zásobníkový automat Z existuje zásobníkový automat Z_1, že $L(Z)=N(Z_1)$
  - $Z_1 = (Q \cup \{q_0', q_f\}, X, Y \cup \{z_0'\}, \delta', q_0', z_0', \emptyset)$
    - na zásobník pomocný symbol z_0'
      - původně vyprázdnění znamenalo konec, nyní by znamenalo přijmutí
    - simulujeme Z
    - v přijímajícím stavu odebereme pomocný z_0'
      - z_0', q_0', q_f jsou nové
      - $\delta'(q_0', \lambda, z_0') = \{(q_0, z_0 z_0')\}$
      - $\delta'(q, x, y) = \delta(q, x, y)$ pro všechna $q \in Q$, $x \in X$, $y \in Y$
      - $\delta'(q, \lambda, y) = \delta(q, \lambda, y)$ pro všechna $q \in Q\text{-}F$, $y \in Y$
      - $\delta'(q, \lambda, y) = \delta(q, \lambda, y) \cup \{(q_f, \lambda)\}$ pro $q \in F$, $y \in Y \cup \{z_0'\}$
        - zde rušíme determinismus
      - $\delta'(q_f, \lambda, y) = \{(q_f, \lambda)\}$ pro $y \in Y \cup \{z_0'\}$
  - $w \in L(Z) \Leftrightarrow (q_0, w, z_0) \vdash_Z^* (f, \lambda, v)$ pro $f \in F$ a $v \in Y^* \Leftrightarrow$
    $(q_0', w, z_0') \vdash_{Z_1} (q_0, w, z_0 z_0') \vdash_{Z_1}^* (f, \lambda, yvz_0') \vdash_{Z_1} (q_f, \lambda, vz_0') \vdash_{Z_1}^* (q_f, \lambda, \lambda)$
    $\Leftrightarrow w \in N(Z_1)$

Přijímání slova u ZA: $N(Z) = L(Z_2)$

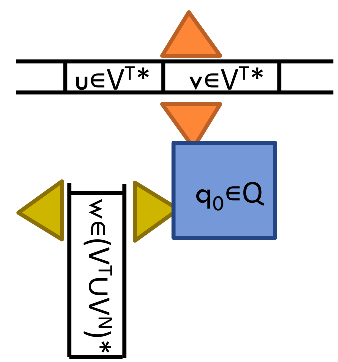
- $Z = (Q, X, Y, \delta, q_0, z_0, F)$
  - pro zásobníkový automat Z existuje zásobníkový automat Z_2, že $N(Z)=L(Z_2)$
    - navíc, když Z je deterministický, je i Z_2 deterministický
  - $Z_2 = (Q \cup \{q_0', q_f\}, X, Y \cup \{z_0'\}, \delta', q_0', z_0', \{q_f\})$
    - na zásobník pomocný symbol z_0'
    - simulujeme Z
    - je-li na zásobníku vidět pomocný z_0', přijímáme, neboť to odpovídá původnímu vyprázdnění
      - z_0', q_0', q_f jsou nové
      - $\delta'(q_0', \lambda, z_0') = \{(q_0, z_0 z_0')\}$
      - $\delta'(q, x, y) = \delta(q, x, y)$ pro všechna $q \in Q$, $x \in X$, $y \in Y$
      - $\delta'(q, \lambda, y) = \delta(q, \lambda, y)$ pro všechna $q \in Q$, $y \in Y$
      - $\delta'(q, \lambda, z_0') = \{(q_f, \lambda)\}$ pro všechna $q \in Q$
  - $w \in N(Z) \Leftrightarrow (q_0, w, z_0) \vdash_Z^* (q, \lambda, \lambda)$ pro $q \in Q \Leftrightarrow$
    $(q_0', w, z_0') \vdash_{Z_2} (q_0, w, z_0 z_0') \vdash_{Z_2}^* (q, \lambda, z_0') \vdash_{Z_2} (q_f, \lambda, \lambda)$
    $\Leftrightarrow w \in L(Z_2)$

Bezkontextová gramatika ⇒ ZA (1)

- bezkontextová gramatika $G = (V_N, V_T, S, P)$
  - sestrojíme zásobníkový automat Z, že $N(Z)=L(G)$
    - myšlenka
      - na zásobníku vytváříme levou derivaci
      - jakmile zásobník začíná terminály, srovnáme zásobník s páskou
      - využití nedeterminismu k uhádnutí derivace



    - $Z = (\{q_0\}, V_T, V_N \cup V_T, \delta, q_0, S, \emptyset)$, kde
      - $\delta(q_0, \lambda, X) = \{(q_0, w) \mid X \rightarrow w \in P\}$ pro všechna $X \in V_N$
        - vytváření levé derivace, pravidlo typu (i)
      - $\delta(q_0, x, x) = \{(q_0, \lambda)\}$ pro všechna $x \in V_T$
        - srovnání zásobníku s páskou, pravidlo typu (ii)

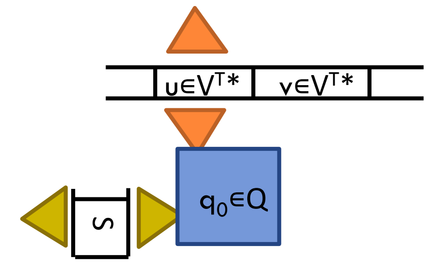


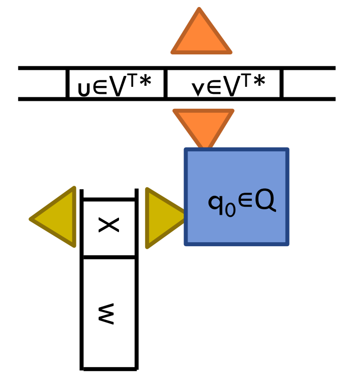
- platí $(q_0, uv, S) \vdash_Z^* (q_0, v, w) \Leftrightarrow S \Rightarrow_G^{lm*} uw$ pro libovolné $u,v \in V_T^*$, $w \in (V_T \cup V_N)^*$

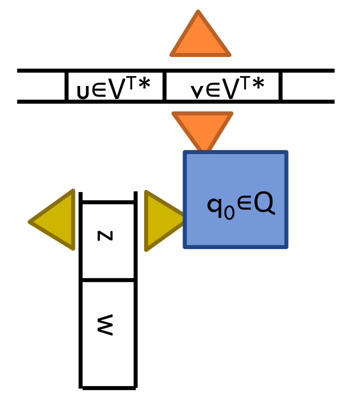
Pavel Surynek, 2015

Bezkontextová gramatika ⇒ ZA (2)

- $(q_0, uv, S) \vdash_Z^* (q_0, v, w) \Leftrightarrow S \Rightarrow_G^{lm*} uw$
  - indukcí podle počtu kroků výpočtu Z (pro ⇒), resp. podle počtu kroků derivace (pro ⇐)
  - ukážeme ⇒ (pro ⇐ je důkaz analogický)
    - 0 kroků
      - $w = S$, $u = \lambda$, $S \Rightarrow_G^{lm*} S$ jistě platí
    - n+1 kroků
      - n+1 krok pravidlem typu (i)
        - $(q_0, uv, S) \vdash_Z^* (q_0, v, Xw) \vdash_Z (q_0, v, zw)$ pro $z \in (V_T \cup V_N)^*$
          - z indukčního předpokladu $S \Rightarrow_G^{lm*} uXw$
          - $uXw \Rightarrow_G^{lm} uzw$ díky pravidlu $X \rightarrow z \in P$
      - n+1 krok pravidlem typu (ii)
        - $(q_0, uxv, S) \vdash_Z^* (q_0, xv, xw) \vdash_Z (q_0, v, w)$ pro $x \in V_T$
          - z indukčního předpokladu $S \Rightarrow_G^{lm*} uxw$
- důsledek N(Z) = L(G)
  - $(q_0, w, S) \vdash_Z^* (q_0, \lambda, \lambda) \Leftrightarrow S \Rightarrow_G^{lm*} w$







ZA ⇒ Bezkontextová gramatika (1)

- zásobníkový automat $Z = (Q, X, Y, \delta, q_0, z_0, F)$
  - sestrojíme bezkontextovou gramatiku G, že $L(G) = N(Z)$
    - pokud $|Q|=1$, stačí předchozí konstrukce
    - pro $|Q|>1$ položíme $G = (\{S'\}\cup\{[q,y,r] \mid q,r\in Q \wedge y\in Y\}, X, S', P)$, kde
      - S' je nový neterminál
      - pravidla P obsahují
        - $S' \rightarrow [q_0, z_0, q]$ pro všechna $q\in Q$
        - $[q, y, r] \rightarrow x[q_1,y_1,\mathbf{q_2}][\mathbf{q_2},y_2,q_3]\ldots [q_n,y_n,r]$ pro každé $y_1,y_2,\ldots,y_n\in Y$, $q, q_1,q_2,\ldots,q_n,r\in Q$, $y\in Y$ a $x\in X\cup\{\lambda\}$ takové, že $(q_1,y_1y_2\ldots y_n)\in\delta(q,x,y)$
        - speciálně $[q, y, r] \rightarrow x$, když $(r, \lambda)\in\delta(q,x,y)$
  - platí $(q, w, y) \vdash_Z^* (r, \lambda, \lambda) \Leftrightarrow [q, y, r] \Rightarrow_G^{lm*} w$ pro libovolné $q,r\in Q$, $y\in Y$ a $w\in X^*$

Pavel Surynek, 2015

ZA ⇒ Bezkontextová gramatika (2)

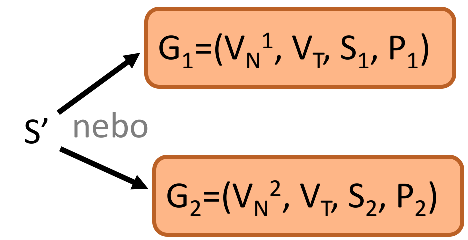
- $(q, w, y) \vdash_Z^* (r, \lambda, \lambda) \Rightarrow [q, y, r] \Rightarrow_G^{lm*} w$
  - indukcí dle délky výpočtu
    - délka výpočtu 1
      - $(q, x, y) \vdash_Z (r, \lambda, \lambda)$ pro $x \in X \cup \{\lambda\}$, tedy $(r, \lambda) \in \delta(q,x,y)$
        - máme pravidlo $[q, y, r] \to x$
    - délka výpočtu n+1
      - $(q, xu_1u_2\ldots u_k, y) \vdash_Z (q_1, u_1u_2\ldots u_k, y_1y_2\ldots y_k)$ pro $(q_1,y_1y_2\ldots y_k) \in \delta(q,x,y)$
      - u_i je slovo, při kterém je zpracován symbol y_i pro $i=1,2,\ldots,k$
        - $(q_i, u_i, y_i) \vdash_Z^* (q_{i+1}, \lambda, \lambda)$ pro jistá $q_i \in Q$ pro $i=1,2,\ldots,k$ $(q_{k+1}=r)$
        - z indukčního předpokladu $[q_i, y_i, q_{i+1}] \Rightarrow_G^{lm*} u_i$
      - k tomu první krok
        - $(q, y, r) \Rightarrow_G^{lm} x(q_1,y_1,q_2)(q_2,y_2,q_3)\ldots(q_k,y_k,r)$
        - tedy celkem $(q, y, r) \Rightarrow_G^{lm*} xu_1u_2\ldots u_k$

ZA $\Rightarrow$ Bezkontextová gramatika (3)

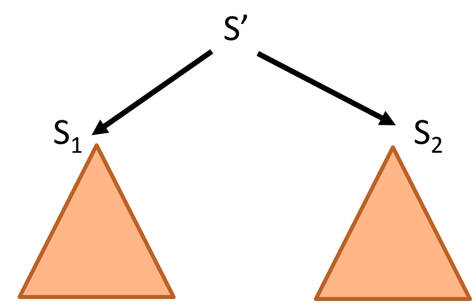
- $(q, w, y) \vdash_Z^* (r, \lambda, \lambda) \Leftarrow [q, y, r] \Rightarrow_G^{lm*} w$
  - indukcí podle délky derivace
    - délka derivace 1
      - $[q, y, r] \Rightarrow_G^{lm} w$ jedině díky pravidlu $[q, y, r] \rightarrow w$, tedy $(r, \lambda) \in \delta(q,w,y)$
    - délka derivace n+1
      - nechť $[q, y, r] \rightarrow x[q_1,y_1,q_2][q_2,y_2,q_3]\ldots [q_k,y_k,r]$ je první použité pravidlo
        - v ZA odpovídá $(q_1,y_1y_2\ldots y_k) \in \delta(q,x,y)$
      - $w = xu_1u_2\ldots u_k$ a $[q_i,y_i,q_{i+1}] \Rightarrow_G^{lm*} u_i$ pro $i=1,2,\ldots,k$ $(q_{k+1}=r)$
      - z indukčního předpokladu $(q_i,u_i,y_i) \vdash_Z^* (q_{i+1}, \lambda, \lambda)$
      - celkem $(q, xu_1u_2\ldots u_k, y) \vdash_Z (q_1, u_1u_2\ldots u_k, y_1y_2\ldots y_k) \vdash_Z^* (r, \lambda, \lambda)$
- důsledek $L(G) = N(Z)$
  - $(q_0, w, z_0) \vdash_Z^* (q, \lambda, \lambda) \Leftrightarrow S' \Rightarrow_G^{lm} [q_0,z_0,q] \Rightarrow_G^{lm*} w$

Bezkontextové **uzávěrové vlastnosti** (1)

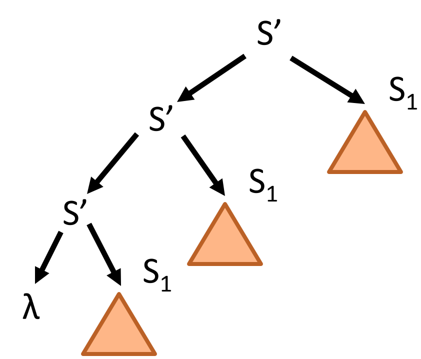
- bezkontextové jazyky jsou uzavřené na konečná **sjednocení**
  - bezkontextové gramatiky $G_1=(V_N^1, V_T, S_1, P_1)$ a $G_2=(V_N^2, V_T, S_2, P_2)$, kde $V_N^1 \cap V_N^2 = \emptyset$
  - položme $G = (V_N^1 \cup V_N^2 \cup \{S'\}, V_T, S', P1 \cup P2 \cup \{S' \rightarrow S_1 | S_2\})$
    - S’ je nový neterminál
  - platí $L(G) = L(G_1) \cup L(G_2)$



- bezkontextové jazyky jsou uzavřené na **konkatenaci**
  - položme $G = (V_N^1 \cup V_N^2 \cup \{S'\}, V_T, S', P_1 \cup P_2 \cup \{S' \rightarrow S_1.S_2\})$
    - S’ je nový neterminál
  - platí $L(G) = L(G_1).L(G_2)$



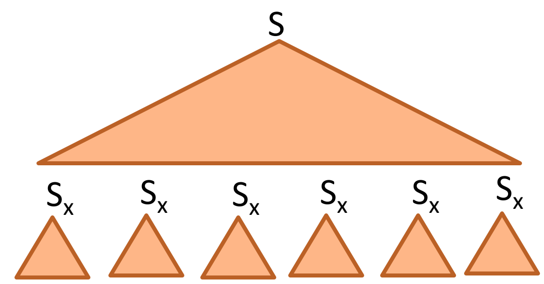
- bezkontextové jazyky jsou uzavřené na **iteraci**
  - položme $G = (V_N^1 \cup \{S'\}, V_T, S', P_1 \cup \{S' \rightarrow \lambda \mid S'S_1\})$
    - S’ je nový neterminál
  - platí $L(G) = L(G_1)^*$



- bezkontextové jazyky jsou uzavřené na **zrcadlový obraz**
  - položme $G = (V_N^1, V_T, S_1, \{X \rightarrow w^R \mid X \rightarrow w \in P_1\})$
  - platí $L(G) = L(G_1)^R$

Bezkontextové **uzávěrové vlastnosti** (2)

- bezkontextové jazyky jsou uzavřené na **bezkontextovou substituci**
  - substituce f: $X \rightarrow 2^{Y^*}$ je bezkontextová substituce, jestliže $f(x)$ je bezkontextový jazyk pro každé $x \in X$
    - máme $G_x = (V_N^x, Y, S_x, P_x)$, že $f(x) = L(G_x)$ pro každé $x \in X$
      - V_N^x jsou po dvou disjunktní
  - mějme bezkontextovou $G = (V_N, X, S, P)$, zajímá nás bezkontextovost $f(L(G))$
  - položíme $G' = (V_N \cup \bigcup_{x\in X} V_N^x \cup X, Y, S, P \cup \bigcup_{x\in X} P^x \cup \{x \rightarrow S_x \mid x \in X\})$
    - platí $L(G') = f(L(G))$



- bezkontextové jazyky **<u>nejsou</u>** uzavřené na **konečné průniky**
  - $L_1 = \{a^i b^j c^j \mid i,j=0,1,2,\ldots\}$
    - $G_1 = (\{S,A,B\}, \{a,b,c\}, S, \{S \rightarrow \lambda \mid A \mid B \mid AB, A \rightarrow a \mid aA, B \rightarrow bc \mid bBc\}), L(G_1)=L_1$
  - $L_2 = \{a^i b^i c^j \mid i,j=0,1,2,\ldots\}$
    - $G_2 = (\{S,A,B\}, \{a,b,c\}, S, \{S \rightarrow \lambda \mid A \mid B \mid AB, A \rightarrow ab \mid aAb, B \rightarrow c \mid Bc\}), L(G_2)=L_2$
  - $L(G_1) \cap L(G_2) = \{a^i b^i c^i \mid i=0,1,2,\ldots\}$, který není bezkontextový

Bezkontextové **uzávěrové vlastnosti** (3)

- bezkontextové jazyky **<u>nejsou</u>** uzavřené na **doplňky**
  - $L = \{a^i b^i c^i \mid i=0,1,2,\ldots\}$, $-L = K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup K_4 \cup K_5 \cup K_6$, kde
    - $K_1 = \{\alpha ba\beta \mid \alpha, \beta \in \{a, b, c\}^*\}$
      - regulární
    - $K_2 = \{\alpha cb\beta \mid \alpha, \beta \in \{a, b, c\}^*\}$
      - regulární
    - $K_3 = \{\alpha ca\beta \mid \alpha, \beta \in \{a, b, c\}^*\}$
      - regulární
    - $K_4 = \{a^i b^j c^k \mid i,j,k=0,1,2,\ldots \wedge i \neq j\}$
      - bezkontextový
    - $K_5 = \{a^i b^j c^k \mid i,j,k=0,1,2,\ldots \wedge j \neq k\}$
      - Bezkontextový
    - $K_6 = \{a^i b^j c^k \mid i,j,k=0,1,2,\ldots \wedge i \neq k\}$
      - bezkontextový
  - -L je bezkontextový, ale jeho doplněk L <u>nikoli</u>
- alternativně
  - $-(-L_1 \cup -L_2) = L_1 \cap L_2$

Bezkontextovost K_4

$G = (\{S,A,B,C,D\}, \{a,b,c\}, S, P)$, kde

$P = \{$

$S \rightarrow AC \mid BC$

$A \rightarrow aA \mid aD$

$B \rightarrow Bb \mid Db$

$C \rightarrow c \mid Cc \mid \lambda$

$D \rightarrow aDb \mid \lambda$

$\}$

$L(G) = K_4$

Speciální **uzávěrové vlastnosti** (1)

- bezkontextové jazyky jsou uzavřené na **průnik s regulárním jazykem**
  - **paralelně** simulujeme zásobníkový a konečný automat
    - R regulární jazyk, že R = L(A) pro konečný automat $A = (Q_A, X, \delta_A, q_{A0}, F_A)$
    - L bezkontextový jazyk, že L = L(Z) pro zásobníkový automat $Z = (Q_Z, X, Y, \delta_Z, q_{Z0}, z_0, F_Z)$
  - definujeme zásobníkový automat $Z' = (Q_A \times Q_Z, X, Y, \delta, [q_{A0}, q_{Z0}], z_0, F_A \times F_Z)$, kde
    - $\delta([p,q], x, y) \ni ([r,s], u)$, jestliže
      - $p=r$ a $(s,u) \in \delta_Z(q,x,y)$ pro $x = \lambda$
        - Z nečte pásku, pracuje na zásobníku, A nepracuje
      - $r = \delta_A(p,x)$ a $(s,u) \in \delta_Z(q,x,y)$ pro $x \neq \lambda$
        - Z a A současně zpracují symbol x
    - $L(Z') = L(A) \cap L(Z) = R \cap L$

Speciální **uzávěrové vlastnosti** (2)

- bezkontextové jazyky jsou uzavřené na **kvocienty s regulárním jazykem**
  - paralelně simulujeme konečný a zásobníkový automat, jakmile se KA dostane do přijímajícího stavu, ZA začne zpracovávat vstup
    - R regulární jazyk, že R = L(A) pro konečný automat $A = (Q_A, X, \delta_A, q_{A0}, F_A)$
    - L bezkontextový jazyk, že L = L(Z) pro zásobníkový automat $Z = (Q_Z, X, Y, \delta_Z, q_{Z0}, z_0, F_Z)$
  - připomenutí
    - $R\backslash L = \{ v \mid (\exists u \in R)\ uv \in L \}$
    - $L/R = \{ u \mid (\exists v \in R)\ uv \in L \}$
  - definujeme zásobníkový automat $Z' = (Q_A \times Q_z \cup Q_z, X, Y, \delta, [q_{A0}, q_{Z0}], z_0, F_Z)$, kde
    - $$\begin{aligned} \delta([p,q], \lambda, y) = \;& \{([r,s], u) \mid (\exists x \in X)(r = \delta_A(p,x) \wedge (s,u) \in \delta_Z(q,x,y))\} \;\cup \\ & \{([p,s],u) \mid (s,u) \in \delta_Z(q,\lambda,y)\} \;\cup \\ & \{(q,y) \mid p \in F_A\} \end{aligned}$$
    - $\delta(q, x, y) = \delta_Z(q,x,y)$ pro $x \in X \cup \{\lambda\}$, $q \in Q_Z$
  - $L(Z') = L(A)\backslash L(Z) = R\backslash L$